

度量单位的本质及小学数学教学

娜仁格日乐, 史宁中

(东北师范大学 数学与统计学院, 吉林 长春 130024)

摘要:度量是数学的本质,是人创造出来的认识数学、进而认识现实世界的工具,度量可以是因人而异的。度量单位就是把不同个体的度量方法标准化,并且能够得到人们的广泛共识。度量的本质在于表现事物某些指标的秩序。人之所以可以进行度量,并且能够对度量单位取得广泛的共识,是基于人的两个先天本能,这就是对数量多少的感知和对距离远近的感知。人还具有两个特殊的能力,这就是抽象能力和想象能力,因此对于人而言,能够基于两个特殊的能力,把两个先天本能延伸到对事物的某些指标进行量化和对量化秩序的感知。度量主要包括两类,一类是通过抽象得到的,是人思维的结果;另一类是借助工具得到的,是人实践的结果。因此,在小学数学相关内容的教学中,应当利用与发展学生的先天本能和特殊能力,分清两类度量的本质特征,构建合适的教学方法,包括设计合适的教学情境和提出合适的数学问题,使得学生在掌握知识技能的同时,感悟度量单位所蕴含的数学思想,培养学生的符号意识和数感,形成数学抽象和直观想象的数学素养。

关键词:度量单位; 小学数学; 数学教学

中图分类号:G622 **文献标识码:**A **文章编号:**1004-9894(2018)06-0013-04

引用格式:娜仁格日乐,史宁中.度量单位的本质及小学数学教学[J].数学教育学报,2018,27(6):13-16.

度量单位是计量事物标准量的名称^[1],几乎所有度量单位的产生和发展都经历了漫长的时间,承载了度量单位由多元到统一,由粗略到精细的发展过程。度量是数学的本质,是人创造出来的数学语言,是人认识、理解和表达现实世界的工具,正如庞加莱所论述的那样:“如果没有测量空间的工具,我们便不能构造空间。”^[2]

度量可以是因人而异的,度量单位就是把不同个体的度量方法标准化,是为了对度量的结果进行传播和交流的需要。因此,度量单位的制定必须能够表达度量的本质,方法科学、表达准确、相对稳定,能够得到人们的广泛共识。

度量的本质在于表示事物某些指标的秩序。这里特别强调的是,人之所以能够进行度量,并且能够对度量单位得到广泛共识,是基于人的两个先天本能,这就是对数量多少的感知和对距离远近的感知¹,这两个先天本能是人能够理解和研究数学的思维基础,这两个先天本能应当作为数学教育的出发点,也应当成为数学认识论和数学哲学的前提。非常遗憾的是,似乎还没有文献从认识论的角度讨论过这个问题,即便可以认为这个问题是认识论的根基。过去的哲学过分关注形而上,或者说过分关注那些观念上的东西,而不关注“人为什么可以”这样的更为现实的问题。

在两个先天本能的基础上,人又具有两种特殊的能力^[3],这就是抽象能力和想象能力。因此,对于人而言,就可以借助两个特殊的能力把两个先天本能延伸到对事物的某些指标进行量化,以及对量化秩序的感知,这就触及到了度量的本质。

无论度量单位的称谓如何²,人们都是用1来表示一个

度量单位,这是数学研究最为基本的概念。虽然度量单位都是人规定,但就度量单位的形成过程而言,大体可以分为两类:一类是通过抽象得到的,是人思维的结果;另一类是借助工具得到的,是人实践的结果。形成过程的不同必然蕴含着思维形式的不同,因此,对于数学教育、特别是对小学数学教育而言,这样划分是必要的。这里分别讨论这两类度量单位的形成过程以及其中蕴含的思维形式,然后再讨论相应的小学数学教学。

1 通过抽象得到的度量单位

从远古时代开始,为了日常生活和生产实践的需要,人们创造出一些语言用来表达事物量的多少,比如,狩猎收获的多少,祭祀牺牲的多少,等等。

在古代中国,这样的表达可以追溯到商代的甲骨文³。虽然在这样的表达中出现了数字,但这些数字都依附于具体的现实背景,因为在数字的后面都缀有特殊的量词,可以把这样的量词看作度量单位的称谓。在现代汉语中,一些后缀量词被根深蒂固地保留下来,比如,“一粒米、两条鱼、三只鸡、四个蛋、五匹马、六头牛、七张纸、八顶帽子、九件衣服、十条裤子”,等等。

可以看到,这样的数字还不完全具有数字符号的功能:因为一粒米与一头牛是不可同日而语的,虽然都是数字1的具体体现;这样的表达是无法进行运算的,因为无法理解一粒米加一头牛得到的是什么。数学研究的对象应当是更为一般的抽象,这就涉及到数量度量的本质,这个本质就是度

设置合适的单位长度,这就保持了度量单位的理念。

3 主要是指殷墟甲骨文,其中大量记载祭祀的事情,涉及到数量,这或许是与上天或者祖先的一种对话形式。殷墟在现今河南安阳小屯村一带,商王盘庚于公元前14世纪左右迁都于此,至纣亡国,历8代12王273年。

1 人的先天本能就是能在动物,特别是哺乳动物那里普遍找到原型的那些东西。

2 有时不需要具体的称谓,但需要保持理念。例如,在数轴上

量数量的多与少,如前所述,这个抽象过程依赖于人对数量多少感知的本能.这个抽象过程最终导致十进制自然数的发明,十进制大概与人有 10 个手指头有关.这个抽象的结果,在形式上是舍去了度量单位的称谓,在实质上是脱离了数量所依赖的具体的现实背景.数学抽象的本质就是舍去事物的现实背景,更确切地,数学抽象就是舍弃事物的一切物理属性.

表示十进制自然数的关键是 10 个符号和数位,其中的度量单位是 1,因此,自然数是一个一个多起来的,皮亚诺就是依据这个原则建立了自然数公理体系.需要特别强调的是,虽然在教科书中是用加法(相反数)或者减法定义负整数,但中国汉代的数学著作《九章算术》表明,负整数与自然数一样,也是人们对数量抽象的结果,与对应正整数之间的关系是:数量相等,意义相反^[4].

基于度量单位,那么 5 就是 5 个 1,50 就是 50 个 1.因为是十进制,因此自然数的数位依次相差 10 倍,可以用现代数学语言表示为…… $10^4, 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, \dots$ 在一般的意义上,可以把数位也看作度量单位.比如,人们通常把 5 000 读作 5 千,这是 5 个 10^3 的语言表述,把 0.05 看作 5 个 0.01,这是对 5 个 10^{-2} 的理解.这样认识度量单位的方法,对于分数度量单位的理解是非常重要的.

虽然分数是数,被称为有理数,但最初的分数是为了表达两个自然数之间的关系,主要表达两种关系,一种关系是整体的等分,另一种关系是两个线段长度的比.

关于整体等分所表达的分数,分数单位的表达形式可以在古埃及象形文字中找到,是在表达整数的符号上面画一个椭圆的符号,比如,在表示 4 的符号上面加上一个椭圆就表示分数单位 $1/4$.特别是在古埃及,几乎所有的分数都是通过分数单位和的形式进行表达的^[5].之所以说这样的分数是整体等分的表达,还有一个重要的理由,是因为古埃及人是这样表述分数的,比如 3 份,他们称 $3/3$ 是分数的第一个数, $2/3$ 是分数的第二个数, $1/3$ 是分数的第三个数,这显然是把整体 1 分成 3 等份的表述.这样的理解延续至今,现代英语仍然用第三(third)、第四(fourth)、第五(fifth)等顺序用语表达分数单位.与整数的表达一样,基于分数单位, $3/5$ 表示的就是 3 个 $1/5$.

两个线段长度比所表达的分数,为了用几何的方法解释无理数.无理数的问题困扰着古希腊的学者,因为包括毕达哥拉斯在内的古希腊学者认为,可以用整数表达世间万物,可是无理数有悖于这种学说.欧几里得在《原理》中定义了这种形式的分数,用长度单位 1 分别度量两个线段的长度,如果线段 a 和 b 是两个可以公度的量,公度的量分别是 n 和 m ,那么这两个线段的长度就分别是 n 和 m ,并且比值 $n:m$ (或者 $\frac{n}{m}$) 就对应于一个有理数;如果这两个线段不可以公度,那么得到的就是无理数,并且用大于或小于号表示无理数与有理数的关系(详细讨论参见文[6]).据说这种思想来源于古希腊学者欧多克斯,一个不争的事实是,这样的思想孕育出了戴德金用有理数的分割定义实数的方法^[7].

后来,人们通过四则运算和极限运算把数由自然数扩充到实数,但用以表达数的、抽象出来的度量单位没有发生实质变化.

2 借助工具得到的度量单位

主要是指基于事物的背景构建的度量单位,这样的度量单位始终含有表达事物背景指标的称谓,例如,刻画事物的重量、长度、能量、体积、温度、速度,等等.这样的度量单位不是抽象的结果,而是借助工具制定的.这里用长度单位的演变过程来分析这类度量单位的本质.

度量长度的本质是度量两点间距离⁴,如前所述,这样的度量依赖的是人对距离远近感知的本能,这样的度量是需要参照物的.

人们最初度量距离的参照物都是人体自身的器官.在现今的日常生活中,这样的度量仍然广泛使用.比如,在中国人们所说的“拃”就是古代中国的“尺”,指的是成年男人大拇指与中指之间的距离,如《孔子家语》中所说:“布手知尺,布指知寸.”还有一个度量单位是“咫”,指的是成年女人大拇指与中指之间的距离,成语“咫尺之间”说的是相差不多.在西方的许多国家仍然把“英尺”作为度量单位,英文单词是 foot 是脚的意思,指的是成年男子一只脚的长度,由于脚的长度因人而异,16 世纪的德国人采用了一个折中的方法,某礼拜日把从教堂里走出的 16 个成年男子集中,测量每人左脚的长度、加在一起取平均,定义这个平均数为英尺的单位长度,延续至今.

由此可见,这样制定的长度单位是因人因地而异的,是无法进行传播和交流的,因此长度单位的制定需要从多元走向统一.现在全世界统一使用的长度单位“米”源于法国,1790 年,法国科学家特别委员会提出建议,定义“米”为巴黎子午线全长的四千万分之一.为了使用方便,1889 年第一届国际计量大会决定,把长度单位“米”固化,用一根相当于这个长度的、截面呈 X 型的铂铱合金棒为“米”的基准,人们称之为“米原器”,这是第一次在全世界范围内确定的长度标准,现在这个“米原器”保存在巴黎国际计量局的地下室中.

随着科学研究的逐渐深入,人们越来越需要非常精细的距离单位,因此长度单位的制定还需要从粗略走向精细.基于“路程=时间×速度”的公式,可以通过时间和速度定义长度单位.根据爱因斯坦相对论的假设,光的速度是绝对的,因此,当人们能精确测定时间和光速以后,1967 年第十三届国际度量衡大会,利用原子钟原理对秒给出严格定义:铯 133 辐射 9 192 631 770 个周期的时间间隔.1983 年第十七届国际计量大会通过定义:米长度为光在真空中 $1/299\,792\,458$ 秒所经过的距离.这样,人们就精细地定义了时间单位和距离单位.通过定义的过程可以看到,无论是古代还是现代,无论是粗略还是精细,这样的度量单位的制定都是借助工具的,因此,这样的度量单位的表达都是具有量纲的.比如,刻画时间的“秒”,刻画距离的“米”,刻画重量的“克”,

4 在《义务教育数学课程标准》中,把“两点间直线段最短”作为一个基本事实,因此,两点间距离等价于两点间直线段长度.

刻画速度的“米/秒”,等等。

3 相应的小学数学教学

通过上面的论述可以看到,对于度量和度量单位的小学数学教学,应当注意到下面3个基本原则。

(1)把握度量单位的数学功能和本质特征。没有度量就没有数学,度量是人们认识数学,进而认识现实世界的基本工具和表达语言,是可以因人而异的。度量单位的确立是为了人们能够对度量进行统一的表达和无歧义的交流,因此度量单位必须能够揭示度量的本质,能够得到人们的共识。度量的本质在于表现事物某些指标的顺序,比如:数量的多少以及抽象出来的数的大小;距离的远近;重量的轻重;速度的快慢。

(2)把握度量单位的形成过程和表达形式。度量单位的形成大体都经历了从多元到统一,从粗糙到精细的过程,这是为了日常生活的表达和科学研究的需要。虽然度量单位都是人规定的,但就形成过程而言,大体可以分为两类:一类是通过抽象得到的,是人思维的结果;另一类是借助工具得到的,是人实践的结果。

(3)把握学生认知度量单位的先天本能和特殊能力。这里特别强调,人之所以能够进行度量,并且能够对度量单位得到广泛共识,是基于人的两个先天本能,这就是对数量多少的感知和对距离远近的感知。这两个先天本能是学生学习数学、度量和度量单位的思维基础,又因为人具有抽象和想象这两种特殊能力,因此可以把两个先天本能延伸到对事物某些指标顺序的感知。

对于具体教学方法的设计而言,上述第二条基本原则是首要的,也就是说,首先要分析清楚所要教学的度量和度量单位是通过什么形式得到的,进而可以采取不同的教学策略。在确定了教学策略以后,再合适地融入第一条和第三条基本原则。第一条基本原则是为了明确教学过程的核心思想和基本框架,在教学过程中突出数学的本质。第三条基本原则强调注重学生认知过程,在教学过程中不仅要关注学生知识技能的掌握,还要关注学生数学素养的形成。下面,简单描述这样的教学设计过程。

基于第二条基本原则,对所要教学的内容确定度量和度量单位的形式,如前所述,形式主要分为两类:一类是通过抽象得到的,是人思维的结果;一类是借助工具得到的,是人实践的结果。

对于通过抽象得到的度量和度量单位,低年级的教学最好采用对应的方法,这不仅仅是因为十进制就是对应于人的十指,事实上,通过对应认识和理解事物的数量关系是最原始的,也最有效的方法,古埃及和古巴比伦最初的数学表达都是采用对应的方法,可以在一些图中发现这个事实^[8]。正因为如此,在现代数学语言中,对应是一个不加定义的原始概念。

比如,可以把3个苹果、3个橘子对应3个小方块,把4个苹果、4个橘子对应4个小方块,并且让学生知道这些量的称谓,能够分辨4个比3个多。这是从感性具体上升到感性一般的思维过程,是数学抽象的第一步,目的就是逐渐

舍去苹果橘子等事物的物理属性,仅保留事物的量以及量之间的多少关系。正如第三条基本原则所论述的那样,对数量多少的感知是人的本能,数学教学应当基于并且发展这种本能。

下面用数字对量的称谓进行符号表达,比如,用3、4分别对3个小方块、4个小方块进行符号表达,同时把量之间的多少关系转化为数之间的大小关系。可以看到,用符号3表示3个小方块,比直接表示3个苹果、3个橘子要便于学生理解数字符号的意义,可以让学生感知和感悟符号表达是具有一般性的;特别是,通过这样的数形结合,有利于学生形成直观想象的能力,这是数学抽象不可缺少的能力。事实上,对于自然数加法的教学,也可以采用这样的对应的方法^[4]。

到了高年级,可以让学生逐渐感悟抽象度量的本质:自然数是一个一个大起来的,其中的1就是度量单位,进而引申到数位:个、十、百、千、万等。比如,认识10 000这个数,可以让学生思考:用“千”可以表示的最大的自然数是9 999,如果又有了一个1,那么如何称呼和表达这个新的数呢?古代中国发明了“万”这个单位,可以把这个新的数读为1万;西方没有发明新的单位,可以把这个数直接读为10千。虽然读的方法可以不同,但这个数的表示方法是一样的:10 000。与此同时,可以让学生自然而然地知道,10 000个比9 999个多1个,10 000比9 999大1。正如第一条基本原则所论述的那样,度量的本质在于表现事物某些指标的顺序。这是从感性一般上升到理性具体的思维过程,实现了更高层次的数学抽象。

这样的教学活动是整体设计、分步实施的。通过这样的教学活动,不仅能够让学生认识和理解数,知道表达自然数的关键是10个符号和数位,还能让学生感悟符号表达的意义;能让学生知道数量的本质是多少关系,与此对应,数的本质是大小关系,逐渐感悟度量的数学本质和度量单位的重要性。与此同时,通过合适的教学情境,让学生经历从感性具体上升到感性一般,从感性一般上升到理性具体的思维过程⁵,体验什么是数学抽象和数学抽象的层次性。这样的教育就是重视过程的教育,经历过程有利于培养学生的符号意识,形成数学抽象的核心素养。

对于通过工具得到的度量和度量单位,与通过抽象得到的数的最大区别是,这时的度量不仅不能舍去事物的物理背景,还要抓住物理背景的本质,基于物理背景的指标构建用于度量的类,不同的类度量采用不同的度量方法。比如,这些指标可以是长度、重量、容量、速度等。度量方法可以因人而异、多种多样,但是有一点是共同的,就是必须借助工具。虽然度量方法可以多种多样,但是为了传播和交流的需要,必须建立统一的度量语言,这就是度量单位⁶。

无论是什么样的度和度量单位,其中的量,最终都必须通过数予以表达,并且都是基于1度量单位进行表达的,

5 在这个意义上,用字母表示数就是从理性具体上升到理性一般。

6 可以讲述合适的数学文化,比如,秦始皇统一中国之后做的第一件事情就是统一文字和度量衡,统一度量衡的实质就是统一度量单位。

不同的是,这时 1 的后面必须缀有度量单位称谓。比如,对应于长度、质量、容量、速度等不同的指标,对应的度量单位的称谓可以是米、克、毫升、米/秒,等等。因此,可以把长度指标的 5 米理解为 5 个 1 米,质量指标 5 克理解为 5 个 1 克。这样,人们就可以通过数的大小顺序表达数量长短、轻重、多少、快慢的顺序。这些,就是第一条基本原则所述说的数学本质的体现。

既然现实背景如此丰富多彩,那么,就应当根据教学内容的需要设计合适的教学情境和提出合适的数学问题。在教学活动中,甚至可以根据情境和问题的需要,自己或小组决定用什么样的度量工具。在这个过程中让学生感知,选取度量工具的不同,可能会影响度量的精确性,比如,度

量课桌的长度,用铅笔的长度做度量单位与用橡皮的长度做度量单位,度量的精确性是不一样的。最终让学生感悟统一度量单位的必要性。在教学中,应当注意到,对距离远近的感知是人的本能,要利用和发展这样的本能,让学生知道,应当根据事物的背景选用合适的度量单位。比如,测量铅笔的长度用厘米,测量书桌的长度用分米,测量教室的长度用米,等等。通过这样的过程的教育,帮助学生建立数感,形成直观想象的数学核心素养。这些,就体现了第三条基本原则所述说的培养学生思维能力的要求。

无论是采用什么样的教学策略,设计什么样的教学过程,最终的教学目标都是培养学生:会用数学的眼睛看,会用数学的思维想,会用数学的语言说。

[参 考 文 献]

- [1] 中国社会科学院语言研究所词典编辑室. 现代汉语词典[M]. 北京:商务印书馆,2004:245.
- [2] 昂利·彭加勒. 科学与方法[M]. 李醒民,译. 北京:商务印书馆,2006:74.
- [3] 史宁中. 试论教育的本原[J]. 教育研究,2009,30(8):3-10.
- [4] 史宁中. 基本概念与运算法则:小学数学教学中的核心问题[M]. 北京:高等教育出版社,2013:5-6.
- [5] 梁宗巨. 世界数学通史(上)[M]. 沈阳:辽宁教育出版社,2001:168.
- [6] 史宁中,娜仁格日乐. 小学数学教科书中的比及其教学[J]. 数学教育学报,2017,26(2):2-5.
- [7] 科士青. 几何学基础[M]. 苏步青,译. 北京:商务印书馆,1954:20.
- [8] 李文林. 数学史概论[M]. 北京:高等教育出版社,2002:11-13.

The Essence of the Measurement Units and the Primary School Mathematics Teaching

Na ren ge ri le, SHI Ning-zhong

(Northeast Normal University, School of Mathematics and Statistics, Jilin Changchun 130024, China)

Abstract: Measurement was the essence of mathematics, which was a tool created by human beings to understand mathematics and then to learn about the present world, varying from person to person. The unit of measurement was the standardization of measurement methods of different individuals, and it could be got a broad consensus. The essence of measurement was the order in which some indicators of things were represented. The reason why people could measure and gain broad consensus on measurement units was based on two innate instincts, namely, the perception of quantity and the sense of distance. What's more, people had two special abilities, abstract and imagination. Thus, for human beings, it could extend to some indicators of things based on two special abilities and two innate instincts to quantify and quantify the order. Measurement mainly included two kinds, one was obtained by abstract, which was the result of human thinking; the other was obtained by means of tools, which was the result of human practice. Therefore, in the process of teaching primary school mathematics related content, what we should do was to utilize and develop the student's innate instinct and special abilities, distinguish the nature of the two kinds of measurement, and build appropriate teaching methods including designing appropriate teaching situation and putting forward appropriate mathematical problems. Moreover, we enable students to understand the mathematical ideas contained in measurement units while developing students' knowledge and skills, and cultivate their symbols consciousness and number sense, and finally form the mathematical literacy of mathematical abstraction and visual imagination.

Key words: measurement units; primary school mathematics; mathematics teaching

[责任编辑:周学智、陈隽]